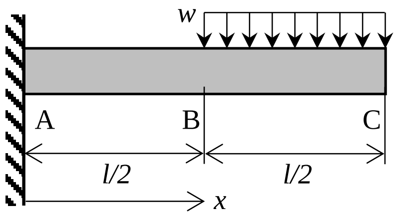
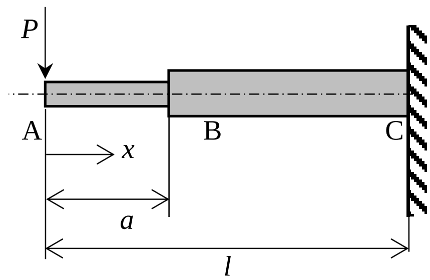
材料力学 II　演習課題（第 5 章分）

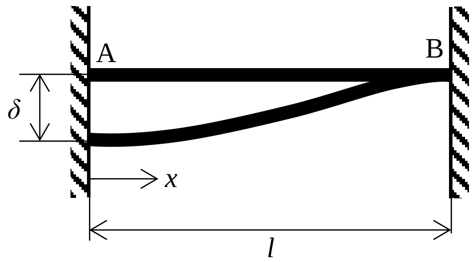
１．下図のように部分的に等分布荷重 w を受ける片持ち梁のたわみ曲線および自由端のたわみを求めよ．ただし，はりの曲げ剛性を EI とする．



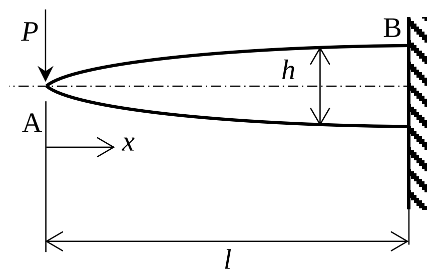
２．下図のように自由端に集中荷重を受ける段つき片持ち梁がある．AC 間で曲げ剛性が EI, BC 間で nEI（n>0）のとき，自由端 A でのたわみを求めよ．



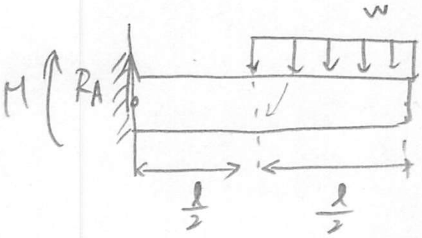
３．下図のように両端固定はりの一端 A を δ だけ下方に移動した．両端の支点反力と固定モーメントを求めよ．



４．下図のように，片持ち梁の自由端 A に集中荷重 P を与えた．このとき，梁の上下面に生じる曲げ応力が一様となるように高さ h を決定せよ．



1.

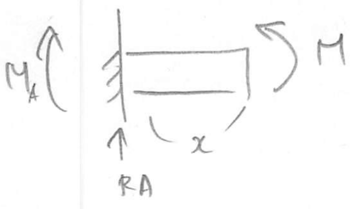


Aにかかる反力をR_A，反モーメントをM_Aとすると

$$R_A = w \cdot \frac{l}{2}$$

$$M_A = -\int_{\frac{l}{2}}^{l} wx\,dx = -\frac{w}{2}\cdot\frac{3}{4}l^2 = -\frac{3}{8}l^2$$

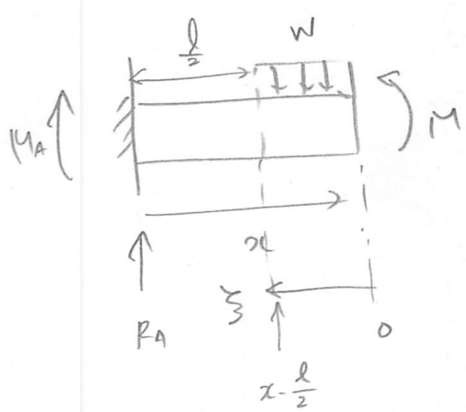
AB間



$$M = M_A + R_A x$$

$$= -\frac{3wl^3}{8} + \frac{wl}{2}x$$

BC間



$$M = M_A + R_A x - \int_0^{x-\frac{l}{2}} w\xi\,d\xi$$

$$= M_A + R_A x - \frac{w}{2}\left(x-\frac{l}{2}\right)^2$$

よって特異関数を用いれば

$$M(x) = -\frac{wl^3}{8} + \frac{wl}{2}x - \frac{w}{2}\left\langle x-\frac{l}{2}\right\rangle^2$$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$ より

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI}\int M(x)\,dx = -\frac{1}{EI}\left\{-\frac{3wl^2}{8}x + \frac{wl}{4}x^2 - \frac{w}{6}\left\langle x-\frac{l}{2}\right\rangle^3\right\} + C_1 \quad -①$$

$x=0$ にて $\frac{dy}{dx}=0$ より $C_1=0$

①をさらに積分して、

$$y=-\frac{1}{EI}\left\{-\frac{3Wl^2}{16}x^2+\frac{Wl}{12}x^3-\frac{W}{24}\left\langle x-\frac{l}{2}\right\rangle^4\right\}+C_2$$

$x=0$ で $y=0$ より、 $C_2=0$

以上より、たわみ曲線は

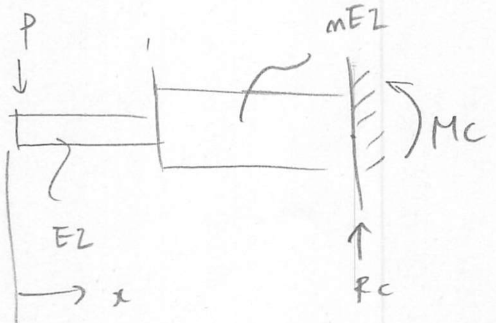
$$y=-\frac{1}{EI}\left(-\frac{3Wl^2}{16}x^2+\frac{Wl}{12}x^3-\frac{W}{24}\left\langle x-\frac{l}{2}\right\rangle^4\right)$$ 〃 となる.

自由端 $(x=l)$ でのたわみ y_c は、

$$y_c=-\frac{1}{EI}\left\{-\frac{3Wl^4}{16}+\frac{Wl^4}{12}-\frac{W}{24}\left\langle l-\frac{l}{2}\right\rangle^4\right\}$$

$$=-\frac{1}{EI}\left\{-\frac{41}{384}Wl^4\right\}=\frac{41Wl^4}{384EI}$$ 〃

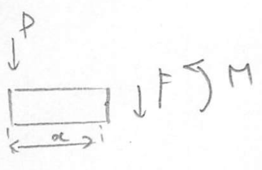
2.



Cでの反力をRc、反モーメントをMcとすると

$$R_c=P,\quad M_c=-Pl$$

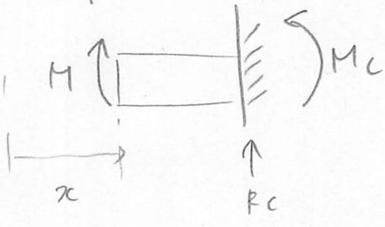
AB間



$$M=-Px$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{Px}{EI}\quad -①$$

BC間



$$M=-Px$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{Px}{nEI}\quad -②$$

①より

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{Px^2}{2}+C_1, \quad \text{～①}'$$

$$EIy=\frac{Px^3}{6}+C_1x+C_2 \quad \text{～①}''$$

②より

$$nEI\frac{dy}{dx}=\frac{Px^2}{2}+C_3, \quad \text{～②}'$$

$$nEIy=\frac{Px^3}{6}+C_3x+C_4 \quad \text{～②}''$$

$x=l$で $\frac{dy}{dx}=0$, $y=0$より

②'から

$$0=\frac{Pl^2}{2}+C_3 \iff C_3=-\frac{Pl^2}{2}$$

②''から

$$0=\frac{Pl^3}{6}-\frac{Pl^3}{2}+C_4 \iff C_4=\frac{Pl^3}{3}$$

また、$x=a$で

$$\frac{1}{EI}\left\{\frac{Pa^2}{2}+C_1\right\}=\frac{1}{nEI}\left\{\frac{Pa^2}{2}-\frac{Pl^2}{2}\right\}$$

$$C_1=\frac{1}{n}\left\{\frac{Pa^2}{2}-\frac{Pl^2}{2}\right\}-\frac{Pa^2}{2}=\frac{P}{2n}\left\{a^2-na^2-l^2\right\}$$

$$=\frac{P}{2n}\left\{(1-n)a^2-l^2\right\}$$

$$\frac{1}{EI}\left\{\frac{Pa^3}{6}+C_1a+C_2\right\}=\frac{1}{nEI}\left\{\frac{Pa^3}{6}-\frac{Pl^2}{2}a+\frac{Pl^3}{3}\right\}$$

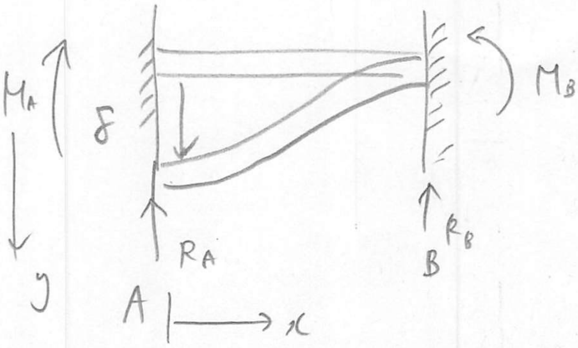
$$C_2=\frac{1}{n}\left\{\frac{Pa^3}{6}-\frac{Pl^2}{2}a+\frac{Pl^3}{3}\right\}-\frac{Pa^3}{6}-\frac{Pa}{2n}\left\{(1-n)a^2-l^2\right\}$$

$$=\frac{P}{3n}\left\{-a^3+na^3+l^3\right\}=\frac{P}{3n}\left\{(n-1)a^3+l^3\right\}$$

自由端では $x=0$ より、①''から

$$y=\frac{1}{EI}\left\{C_2\right\}=\frac{1}{EI}\frac{P}{3n}\left\{(n-1)a^3+l^3\right\}=\underline{\frac{P}{3nEI}\left\{(n-1)a^3+l^3\right\}}$$

3.

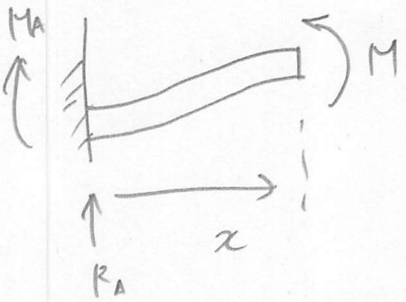


力のつり合いより

$$R_A + R_B = 0 \quad -①$$

モーメントのつり合いより

$$M_A = M_B \quad -②$$



← において

$$M(x) = M_A + R_A x \quad -③$$

よって

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M = -(M_A + R_A x) \quad -④$$

$$EI\frac{dy}{dx} = -M_A x - R_A\frac{x^2}{2} + C_1 \quad -⑤$$

$$EIy = -\frac{M_A x^2}{2} - R_A\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \quad -⑥$$

$x=0$ で $\frac{dy}{dx} = 0$ より ⑤から

$$0 = C_1 \quad -⑦$$

$x=0$ で $y = \delta$ より ⑥から

$$C_2 = EI\delta \quad -⑧$$

$x=l$ で $\frac{dy}{dx} = 0$ より

$$0 = -M_A l - \frac{R_A l^2}{2} \quad -⑨$$

$x=l$ で $y=0$ より

$$0 = -\frac{M_A}{2}l^2 - \frac{R_A l^3}{6} + EI\delta \quad -⑩$$

⑨ $\times \frac{l}{2}$ − ⑩

$$-\frac{R_A l^3}{4} + \frac{R_A l^3}{6} - EI\delta = 0$$

$$-\frac{R_A l^3}{12} = EI\delta$$

$$\therefore \quad R_A = -\frac{12EI\delta}{l^3} \quad —⑪$$

//

⑨, ⑪ より

$$M_A = \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{-12EI\delta}{l^2} \right) = -\frac{6EI\delta}{l}$$

//

② より

$$M_B = -\frac{6EI\delta}{l}$$

//

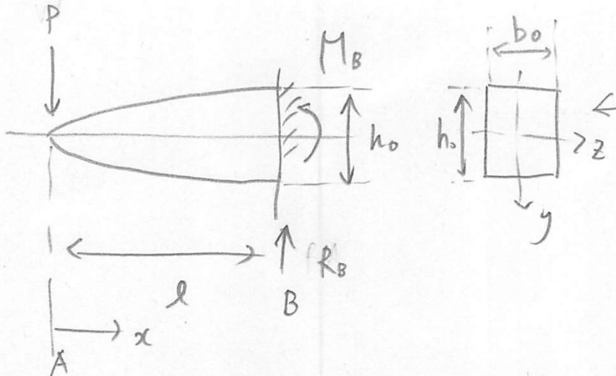
① より

$$R_B = \frac{12EI\delta}{l^3}$$

//

//

4



← この断面の情報をプリントに載せ忘れてました

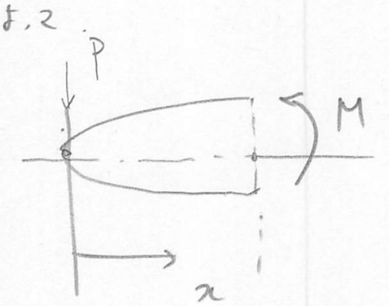
はりの上下面に発生する曲げ応力σは

$$\sigma = \frac{M}{I} y \Big|_{y=\pm\frac{h_0}{2}}$$ である ―①

力のつり合いとモーメントのつり合いより

$R_B = P, \quad M_B = -Pl$

よって



$M = -Px$ ―②

長方形断面での断面二次モーメントIは

$I = \frac{b_0 h^3}{12}$ （ここで b_0 は常に一定、h は x の関数、$h = h_0$ @ $x = l$） ―③

となるので ①～③より

$$\sigma = \frac{-Px}{\frac{b_0 h^3}{12}}\left(\pm\frac{h_0}{2}\right) = \pm\frac{6Px}{b_0 h^2}$$

$|\sigma|$ が $x = 0 \sim l$ で一定とすれば

任意のxにおけるσ → $\frac{6Px}{b_0 h^2} = \frac{6Pl}{b_0 h_0^2}$ ← Bでのσ ―④ となる必要がある。

以上より $\frac{x}{h^2} = \frac{l}{h_0^2} \iff \underline{h = h_0\sqrt{\frac{x}{l}}}$ //